

Лабораторная работа №4 (стр 415) Ниже даны ссылки на фото и видео лабораторной работы. ЛР прислать на почту.

<https://cloud.mail.ru/public/4QSb/49oDYh3yr>

<https://cloud.mail.ru/public/2PDZ/3kpuFrX9q>

Решение задач. Подготовка к контрольной работе (решение оформить в тетрадь, присылать не надо).

Задача 1

На нити, переброшенной через неподвижный блок, подвешены грузы массами m и $2m$. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их отпустить? Трением в блоке пренебречь.

Анализ условия:

- в задаче описаны два связанных груза;
- на каждый из них действует сила тяжести и одинаковая по модулю сила натяжения нити (по третьему закону Ньютона);
- грузы жестко связаны нерастяжимой нитью, значит, они оба движутся с одинаковым ускорением, по второму закону Ньютона, вызванным равнодействующей силой для каждого груза;
- естественно предположить, что ускорение будет направлено в сторону более тяжелого груза (рис. 3).

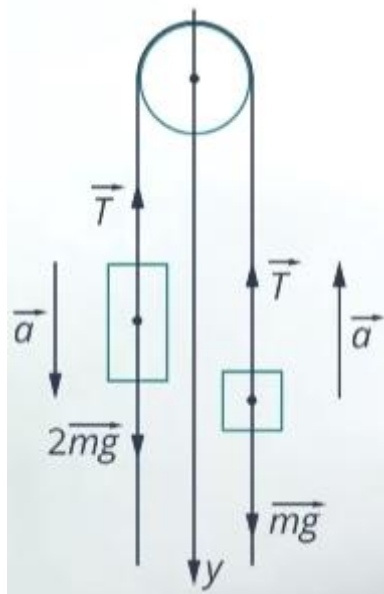


Рис. 3. Силы, действующие на грузы

Решение

Тела движутся вдоль вертикального направления, поэтому направим координатную ось вертикально, например, вниз.

Применим второй закон Ньютона для каждого тела:

$$2m\vec{g} + \vec{T} = 2m\vec{a}$$

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Запишем в проекции на ось y и получим систему уравнений:
$$\begin{cases} 2mg - T = 2ma \\ mg - T = -ma \end{cases}$$

Остается решить систему и найти ускорение, которое получим равным $a = \frac{g}{3}$.

Математическая часть решения задачи

$$\begin{cases} 2mg - T = 2ma \\ mg - T = -ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2mg - T = 2ma \\ mg - T = -ma \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение из первого: $2mg - mg = 2ma + ma$

$$a = \frac{g}{3}$$

Решение задач. Задача 2

Два бруска, массы которых равны $m_1 = 200 \text{ кг}$ и $m_2 = 300 \text{ кг}$, связаны нитью и лежат на гладком столе. К одному из брусков приложена сила $\vec{F}$, направленная параллельно плоскости стола. При каком максимальном значении силы $F_{\max}$ нить оборвется, если сила будет приложена: а) к бруску массой m_1 ; б) к бруску массой m_2 ? Нить выдерживает максимальную силу натяжения $T_{\max} = 9,8 \text{ Н}$. Трением пренебречь.

Анализ условия:

- в задаче описаны два связанных груза;

- решим задачу для случая а. Тогда на первый брусок действует сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила $\vec{F}$. На второй брусок действует сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_2$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Обозначим силы на рис. 3.

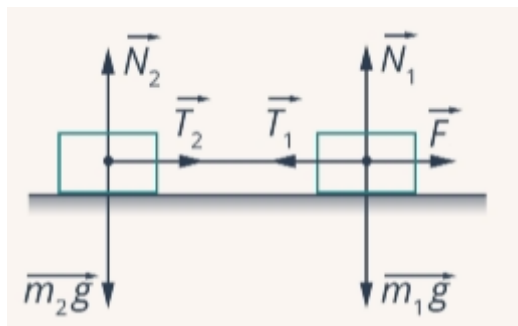


Рис. 3. Решение задачи для случая а

- по третьему закону Ньютона $T_1 = T_2 = T$;

- грузы жестко связаны нерастяжимой нитью, значит, они оба движутся с одинаковым ускорением. Будем применять второй закон Ньютона.

- нам нужно решить задачу для случая, когда нить вот-вот разорвется, поэтому при вычислениях подставим значение T_{max} .

Решение

Выберем систему координат. Как и в одной из предыдущих задач, в проекции на вертикальную ось координат мы получим для каждого бруска, что $N = mg$, нас в данной задаче это не интересует. Поэтому нам будет достаточно одной оси, направим ее вдоль действия силы $\vec{F}$ (рис.4).

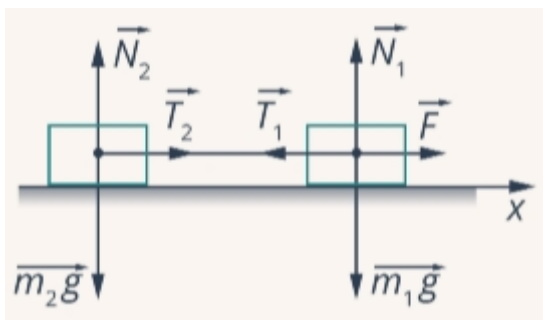


Рис. 4. Направление оси x

Применим второй закон Ньютона для каждого тела:

$$m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T} + \vec{F} = m_1 \vec{a}$$

$$m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}$$

Запишем в проекции на ось x. Сразу подставим значения сил T_{max} и F_{max} и получим систему уравнений:
$$\begin{cases} -T_{max} + F_{max} = m_1 a \\ T_{max} = m_2 a \end{cases}$$

Остается решить систему и найти F_{max} .

Математическая часть решения задачи

$$\begin{cases} -T_{max} + F_{max} = m_1 a \\ T_{max} = m_2 a \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения ускорение a : $a = \frac{T_{max}}{m_2}$.

Подставим в первое и выразим F_{max} : $-T_{max} + F_{max} = m_1 \frac{T_{max}}{m_2}$.

$$F_{max} = m_1 \frac{T_{max}}{m_2} + T_{max} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} T_{max}$$

$$\text{Вычислим: } F_{max} = \frac{0,2 \text{ кг} + 0,3 \text{ кг}}{0,3 \text{ кг}} \cdot 9,8 \text{ Н} \approx 16,3 \text{ Н}$$

Получим конечную формулу $F_{max} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} T_{max}$ и ответ 16,3 Н. При ответе на вопрос 6 (показать графикой условие) задача будет решаться точно так же, только бруски 1 и 2 поменяются местами. Рекомендуем вам проделать это самостоятельно, а я подставляю в конечной формуле вместо m_1 – и, наоборот, получим:

$$6) F_{max} = \frac{m_2 + m_1}{m_2} T_{max}$$

$$F_{max} = 24,5 \text{ Н}$$

Девочка тянет равномерно по снегу нагруженные санки массой 40 кг. Коэффициент трения санок о снег 0,04. Определите, под каким углом должна быть расположена верёвка, чтобы её натяжение было минимально.

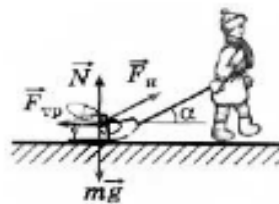


Рис. 3.29

Решение.

На санки действуют сила натяжения верёвки $\vec{F}_H$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 3.29). Согласно второму закону Ньютона для санок запишем:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_H \quad (1)$$

Так как движение по условию равномерное, то ускорение $a = 0$.

Запишем уравнение (1) в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$0 = F_H \cos \alpha - F_{тр}; \quad (2)$$

$$0 = F_H \sin \alpha + N - mg. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получим $N = mg - F_H \sin \alpha$.

Подставив в уравнение (2) выражение для силы трения

$$F_{тр} = \mu x(mg - F_H \sin \alpha), \text{ получим } F_H \cos \alpha - \mu x(mg - F_H \sin \alpha) = 0.$$

Для силы натяжения имеем $F_H = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$.

Сила натяжения минимальна при максимальном значении суммы $\cos \alpha + \mu \sin \alpha = f(\alpha)$.

Исследуем функцию на экстремум: $f' = -\sin \alpha + \mu \cos \alpha = 0$.

Получим $\tan \alpha = \mu$. Тогда $F_H = \frac{\mu mg}{\cos \alpha (1 + \mu \tan \alpha)}$.

Выразим $\cos \alpha$ через $\tan \alpha$: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

Окончательно для силы натяжения получим $F_H = \frac{\mu mg \sqrt{1 + \mu^2}}{1 + \mu^2} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}} \approx 15,7 \text{ Н}$.

Брусок массой 5 кг тянут по поверхности стола, взявшись за кольцо динамометра. При этом ускорение тела равно $0,5 \text{ м/с}^2$. Жёсткость пружины равна 200 Н/м . Определите растяжение пружины. Коэффициент трения бруска о стол $0,05$.

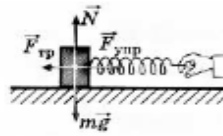


Рис. 3.30

Решение.

На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила натяжения пружины $\vec{F}_{\text{упр}}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 3.30).

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_{\text{упр}}.$$

В проекции на горизонталь уравнение запишем в виде $ma = F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}}$.

Сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$.

Сила упругости $F_{\text{упр}} = -kx$.

Тогда $ma = kx - \mu mg$.

Удлинение пружины $x = \frac{m(a + \mu g)}{k} = 0,025 \text{ м}$.

Два бруска массами $m_1 = 1 \text{ кг}$ и $m_2 = 3 \text{ кг}$ соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Брусок с большей массой находится на наклонной плоскости, угол у основания которой равен 30° , коэффициент трения равен $0,04$. Определите ускорение брусков.

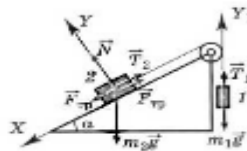


Рис. 3.31

Решение.

На первый брусок действуют сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила тяжести $m_1\vec{g}$ (рис. 3.31). На второй брусок действуют сила натяжения нити $\vec{T}_2$, сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$.

Согласно второму закону Ньютона запишем:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1, \quad (1)$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}. \quad (2)$$

Рассмотрим движение тел относительно одного тела отсчёта, например относительно наклонной плоскости. Модули ускорений брусков равны вследствие условия нерастяжимости нити: $a_1 = a_2 = a$.

Для записи уравнений в проекциях на оси надо знать направления сил. Сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости бруска. Сила трения может быть направлена и вверх, и вниз вдоль наклонной плоскости.

Рассчитаем, в какую сторону происходит движение брусков. Движение бруска 2 влево обеспечивает проекция силы тяжести на ось X, равная $m_2g \sin \alpha = 15 \text{ Н}$, а вправо — сила тяжести, действующая на брусок 1, равная 10 Н . Следовательно, брусок 2 движется вниз и сила трения направлена вверх.

В проекции на ось Y_1 уравнение (1) запишем в виде

$$m_1a = -m_1g + T_1. \quad (3)$$

В проекциях на оси X и Y уравнение (2) запишем в виде

$$m_2a = m_2g \sin \alpha - F_{\text{тр}} - T_2 \quad (4)$$

$$0 = N - m_2g \cos \alpha. \quad (5)$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_2g \cos \alpha$.

Силы натяжения, действующие на бруски, равны в силу невесомости блока и нити: $T_1 = T_2 = T$.

Уравнения (3) и (4) перепишем в виде

$$\begin{cases} m_1a = -m_1g + T; \\ m_2a = m_2g \sin \alpha - \mu m_2g \cos \alpha - T. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части этих уравнений, получим $(m_1 + m_2)a = -m_1g + m_2g \sin \alpha - \mu m_2g \cos \alpha$.

Окончательно для определения ускорения имеем выражение

$$a = g \frac{-m_1 + m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha}{m_1 + m_2} \approx 1 \text{ м/с}^2.$$

Вычислите первую космическую скорость для Солнца. Масса Солнца $2 \cdot 10^{30}$ кг, диаметр Солнца $1,4 \cdot 10^9$ м.

Решение.

Спутник движется вокруг Солнца под действием единственной силы — силы тяготения. Согласно второму закону Ньютона запишем:

$$\frac{mv_1^2}{R_c} = G \frac{mM}{R_c^2}.$$

Из этого уравнения определим первую космическую скорость, т. е. минимальную скорость, с которой надо запустить тело с поверхности Солнца, чтобы оно стало его спутником:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_c}} \approx 437 \text{ км/с},$$

Задача 2.

Вокруг планеты на расстоянии 200 км от её поверхности со скоростью 4 км/с движется спутник. Определите плотность планеты, если её радиус равен двум радиусам Земли ($R_{пл} = 2R_3$).

Решение.

Планеты имеют форму шара, объём которого можно вычислить по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, тогда плотность планеты

$$\rho_{пл} = \frac{M_{пл}}{V_{пл}} = \frac{M_{пл}}{\frac{4}{3}\pi R_{пл}^3}, \quad (1)$$

где $M_{пл}$ — масса планеты, $R_{пл}$ — её радиус.

Спутник движется вокруг планеты по круговой орбите. На него действует сила тяготения $F_{тяг}$, которая определяет центростремительное ускорение.

Согласно второму закону Ньютона

$$ma_{цс} = F_{тяг}, \text{ или } \frac{mv^2}{(R_{пл} + h)} = G \frac{mM_{пл}}{(R_{пл} + h)^2}.$$

Из последнего уравнения находим массу планеты: $M_{пл} = \frac{v^4(R_{пл} + h)}{G}$.

Подставив это выражение в формулу (1), имеем

$$\rho_{пл} = \frac{v^2(R_{пл} + h)}{\frac{4}{3}\pi R_{пл}^3 G} = \frac{v^2(2R_3 + h)}{\frac{32}{3}\pi R_3^3 G} \approx 355 \text{ кг/м}^3.$$